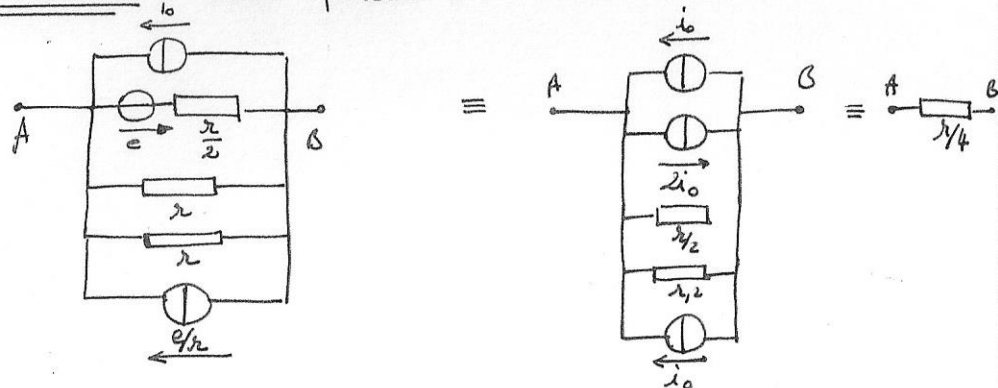


Corrigé exercices

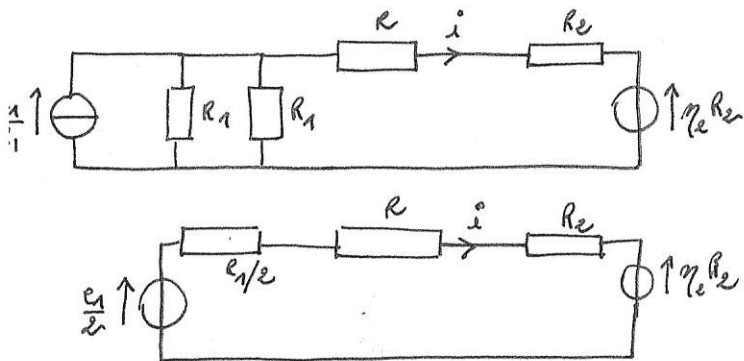
(chap 1: Oscillateurs libres amortis).

Exercice 1: circuit équivalent à :



Exercice 2: il suffit d'appliquer les relations du diviseur de tension et du diviseur d'intensité. (et de réaliser des associations de résistances)

Exercice 3: le circuit est équivalent à :



Une simple loi des mailles suffit pour avoir i :

$$\frac{E_1}{2} - \left(\frac{R_1}{2} + R + R_2 \right) i - \eta_2 R_2 = 0 \Rightarrow i = \frac{\frac{E_1}{2} - \eta_2 R_2}{\frac{R_1}{2} + R + R_2}$$

Exercice 4:

1

- 1) - charge initiale nulle $\Rightarrow$ condensateur déchargé. $q = 0$
 alors $u_C = 0$ et $\frac{E}{r} = \frac{1}{2} \frac{E}{r} = 0$. (si non $q_i = \frac{1}{2} q_i$ et $E = \frac{1}{2} E$)
 2) $u_C + Ri = E$ $u_C + RC \frac{du_C}{dt} = E$ (charge initiale)

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{RC} = \frac{E}{RC}$$

solution : $u_C = E(1 - e^{-t/\tau})$ avec $\tau = RC$. (car $u_C(0) = 0$).

$$3) u_C(t_{90\%}) - u_{C, \min} = 0,9(u_{C, \max} - u_{C, \min})$$

$$u_C(t_{90\%}) - 0 = 0,9(E - 0)$$

$$E(1 - e^{-t_{90\%}/\tau}) = 0,9E$$

$$1 - 0,9 = e^{-t_{90\%}/\tau}$$

$$\ln(1 - 0,9) = -\frac{t_{90\%}}{\tau}$$

$$t_{90\%} = -\tau \ln(0,1) = \tau \ln 10 \approx 2,3\tau$$

(que $t_{10\%} \Leftrightarrow u_C(t_{10\%}) = 0,1E = E(1 - e^{-t_{10\%}/\tau})$)

$$1 - 0,1 = e^{-t_{10\%}/\tau}$$

$$t_{10\%} = -\tau \ln(1 - \frac{1}{10})$$

$$t_{10\%} = \tau \ln \frac{10}{9}$$

$$t_{90\%} - t_{10\%} = \tau \ln 10 - \tau \ln \frac{10}{9} = \tau \ln 9 \approx 2,2\tau$$

autre manière possible sur l'oscillo. qui permet d'accéder à la valeur de τ

$$t_{g0} = 2,4 \times 0,1 \cdot 10^{-3} = 0,24 \text{ ms}$$

$$\text{Or } t_{g0} = \tau \ln 10 \Rightarrow \tau = 1,04 \cdot 10^{-4} \text{ s}$$

$$\text{et } RC = \tau \text{ d'où } C = \frac{\tau}{R} \quad C = \frac{1,04 \cdot 10^{-4}}{500} \quad C = 2,1 \cdot 10^{-7} \text{ F} \\ C = 0,21 \text{ pF}$$

$$\Delta E_{\text{cond}} = E_{\text{cond}}(t \rightarrow \infty) - E_{\text{cond}}(t=0)$$

$$\Delta E_{\text{cond}} = \frac{1}{2} C u_c^2(\infty) - 0 = \frac{1}{2} C E^2$$

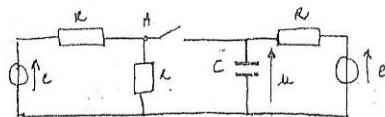
$$W_G = \int_{t=0}^{+\infty} P \cdot dt = \int_{t=0}^{+\infty} E \cdot i \cdot dt = \int_{t=0}^{+\infty} E \cdot dq = E \int_0^{\infty} C du_c = EC \int_0^E du_c \quad \text{Énergie fournie par le générateur}$$

$$W_G = CE (u_c(+\infty) - u_c(0)) = CE (E - 0)$$

$$W_G = CE^2 = 2 \Delta E_{\text{cond}} \quad \text{L'énergie délivrée par le générateur a été utilisée en moitié par le condensateur et l'autre moitié a été dissipée par effet Joule dans la résistance R.}$$

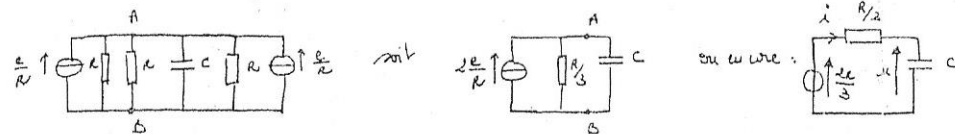
Exercice 5

à $t=0^-$ l'interrupteur est ouvert et le condensateur est chargé $u(0^-) = E$.



Ainsi à $t=0^+$ la continuité de u aux bornes du condensateur impose : $u(t=0^+) = E$.

à $t \geq 0$ le circuit est équivalent à :



donc l'équation différentielle vérifiée par u est :

$$\frac{du}{dt} + \frac{3}{RC} u = \frac{E}{RC}$$

$$\text{donc } \ddot{u} + \frac{3}{RC} \dot{u} = \frac{E}{RC}$$

$$\text{La solution est : } u(t) = A e^{-\frac{3}{RC}t} + \frac{E}{3}$$

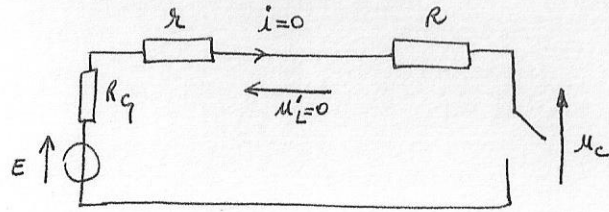
$$\text{Les conditions initiales donnent : } u(t=0^+) = E = A + \frac{E}{3} \Rightarrow A = \frac{2}{3}E$$

$$\text{Finalement : } u(t) = \frac{E}{3} \left[2 e^{-\frac{3}{RC}t} + 1 \right]$$

$$\frac{3}{RC} = 3 \Rightarrow u(t) = 5 \left(e^{-3t} + 1 \right) = 10 + 5e^{-3t}$$

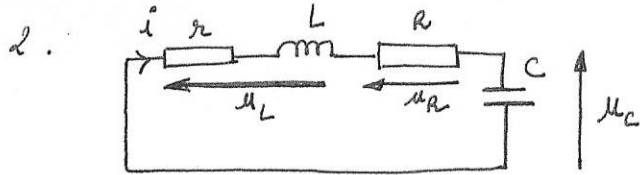
Exercice 6 : Août 2009

1. Circuit équivalent en régime permanent continu:



$$u'_L = 0 \text{ et } u_C = E - (R_G + r + R)i = E \text{ car } i = 0 \text{ (circuit ouvert)}$$

$$u_R = Ri = 0$$



$$u_C + u_R + u_L = 0$$

$$u_C + Ri + r i + L \frac{di}{dt} = 0$$

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt} \text{ donc } u_C + RC \frac{du_C}{dt} + rC \frac{du_C}{dt} + LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} = 0$$

$$\ddot{u}_C + \frac{R+r}{L} \dot{u}_C + \frac{1}{LC} u_C = 0$$

$$\text{on pose } \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \text{ et } \frac{R+r}{L} = \frac{\omega_0}{Q} \text{ (soit } Q = \frac{L\omega_0}{R+r} = \frac{1}{R+r} \sqrt{\frac{L}{C}})$$

$$\text{et on obtient : } \ddot{u}_C + \frac{\omega_0}{Q} \dot{u}_C + \omega_0^2 u_C = 0$$

3. Bobine : continuité de i
condensateur : continuité de u_C

donc à $t=0$ $u_C = E$ et $i = 0$
soit $u_C(t=0) = E$ et $C \frac{du_C}{dt}(0) = 0$
donc $\frac{du_C}{dt}(0) = 0$.

4. le régime est pseudo-périodique : u_C tend vers 0 en oscillant.

$$\text{polynôme caractéristique : } x^2 + \frac{\omega_0}{Q} x + \omega_0^2 = 0$$

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 \Rightarrow \text{le régime est pseudo-périodique si } \Delta < 0$$

$$\text{si } \frac{1}{Q^2} - 4 < 0 \Rightarrow Q > \frac{1}{2} \text{ soit } \frac{1}{R+r} \sqrt{\frac{L}{C}} > \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{L}{C}} > R+r$$

$$\text{donc si } R < \sqrt{\frac{L}{C}} - r.$$

$$5. \Delta = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right) \Rightarrow \text{racines complexes } x = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

$$\text{donc } \lambda = \frac{\omega_0}{2Q} \text{ et } \omega = \left(\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \right) \omega_0$$

$$\bullet \frac{du_C}{dt} = e^{-\lambda t} \left((-\lambda A \cos \omega t - \lambda B \sin \omega t) + \omega A \sin \omega t + B \omega \cos \omega t \right)$$

$$\text{à } t=0 \frac{du_C}{dt} = 0 = -\lambda A + B \omega \Rightarrow A = \frac{B \omega}{\lambda}$$

$$\bullet \text{ et } u_C(t=0) = E = A$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_C(t) = e^{-\lambda t} \left(E \cos \omega t + \frac{E \sin \omega t}{\omega} \right) \end{array} \right.$$

$$6. T = 1,29 - 0,65 = 0,64 \text{ ms} \text{ alors } \omega = \frac{2\pi}{T} = 9,8 \cdot 10^3 \text{ rad/s.}$$

$$7. \delta = \ln \frac{u_C(t)}{u_C(t+T)} = \lambda T = \frac{\omega_0}{2Q} \cdot T \Rightarrow \omega_0 = \frac{2Q\delta}{T}$$

$$\text{or } \omega^2 = \left(1 - \frac{1}{4Q^2} \right) \omega_0^2 \text{ donc } \omega^2 = \left(1 - \frac{1}{4Q^2} \right) 4Q^2 \frac{\delta^2}{T^2}$$

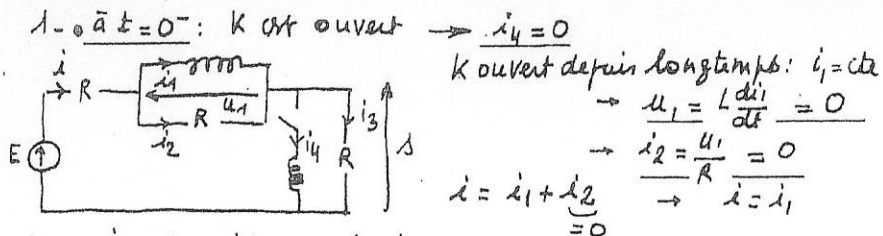
$$\omega^2 T^2 = 4\pi^2 = (4Q^2 - 1) \delta^2 \Rightarrow 4Q^2 = 1 + \frac{4\pi^2}{\delta^2} \Rightarrow Q = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{\delta^2}}$$

$$8. \delta = \ln \frac{2,73}{0,73} = 1,32 \Rightarrow Q = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{1,32^2}} = 2,4$$

$$\omega_0 = \frac{2Q\delta}{T} \Rightarrow \omega_0 = \frac{2 \times 2,4 \times 1,32}{0,64 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow \omega_0 = 1,0 \cdot 10^4 \text{ rad/s.}$$

$$L = \frac{1}{\omega_0^2 C} \Rightarrow L = \frac{1}{10^8 \cdot 10^{-7}} = 0,10 \text{ H.}$$

Exercice n°7:



1. $\bar{a} t = 0^-$: K est ouvert $\rightarrow i_4 = 0$
 K ouvert depuis longtemps: $i_1 = \text{cte}$
 $\rightarrow u_1 = L \frac{di_1}{dt} = 0$
 $\rightarrow i_2 = \frac{u_1}{R} = 0$
 $i = i_1 + i_2 = 0 \rightarrow i = i_1$

$$i = i_4 + i_3 \rightarrow i = i_3$$

$$E = R i_3 + R i_2 + R i = 2 R i \rightarrow i = \frac{E}{2R} = i_1 = i_3$$

$$A = R i_3 \rightarrow A = \frac{E}{2}$$

2. $\bar{a} t = 0^+$: les courants sont continus dans les bobines

$$\rightarrow i_4 = 0 \quad i_1 = \frac{E}{2R}$$

$$i = i_1 + i_2 = i_3 + i_4$$

$$E = R i_3 + R i_2 + R i = R(i - i_4) + R(i - i_1) + R i = 3 R i - R i_1$$

$$\rightarrow i = \frac{3E/2}{3R} \rightarrow i = \frac{E}{2R} = i_3$$

$$i_2 = i - i_1 = 0$$

$$A = R i_3 = \frac{E}{2}$$

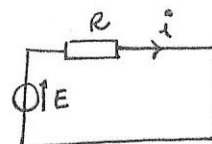
3. $\text{qd } t \rightarrow \infty$: régime permanent, toutes les grandeurs électriques sont constantes

$$\begin{cases} i_4 = \text{cte} \rightarrow A = L \frac{di_4}{dt} = 0 \\ i_1 = \text{cte} \rightarrow u_1 = L \frac{di_1}{dt} = 0 \end{cases} \quad \text{(- bobines équivalentes à des fils)}$$

$$i_3 = \frac{A}{R} = 0$$

$$i_2 = \frac{u_1}{R} = 0$$

(résistances const. circuitées) $\Rightarrow$ circuit équivalent:



$$i = i_1 = i_4$$

loi des mailles: $E = 0 + 0 + R i \rightarrow i = E/R$

$$i_1 = i - i_2 = 0 \rightarrow i_1 = E/R \quad i_4 = i - i_3 = 0 \rightarrow i_4 = E/R = i_1$$

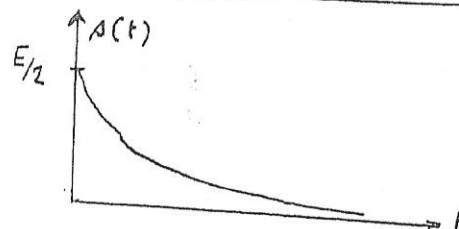
$$3 - 3 \frac{d^2 A}{dt^2} + \frac{4R}{L} \frac{dA}{dt} + \frac{R^2}{L^2} A = 0$$

équation caractéristique: $3r^2 + \frac{4}{\tau} r + \frac{1}{\tau^2} = 0$ avec $\tau = \frac{L}{R}$

$$\Delta = \frac{16}{\tau^2} - \frac{12}{\tau^2} = \frac{4}{\tau^2}$$

$$r = \left(-\frac{4}{\tau} \pm \frac{2}{\tau} \right) \times \frac{1}{6} \quad \text{soit } r_1 = -\frac{1}{\tau} \quad \text{et } r_2 = -\frac{1}{3\tau}$$

$$\text{et } A(t) = A e^{-t/3\tau} + B e^{-t/\tau}$$

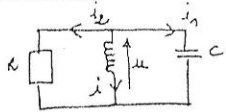


$\bar{a} t = 0^+$:

$$A(0^+) = \frac{E}{2} = A + B$$

régime apériodique

Exercice 8:



$$u = L \frac{di_1}{dt} \quad u = u_C \rightarrow i_1 = C \frac{du}{dt} \quad \text{et} \quad Ri_2 = u \quad i_2 = \frac{u}{R}$$

$$i_1 + i_2 + i = 0 \quad \text{donc} \quad C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R} + i = 0$$

$$\text{si on dérive cette expression on obtient:} \quad C \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{du}{dt} + \frac{u}{L} = 0$$

$$\text{soit} \quad \ddot{u} + \frac{1}{RC} \dot{u} + \frac{1}{LC} u = 0$$

$$\text{Soit } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{RC} \quad \text{on obtient alors} \quad \ddot{u} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{u} + \omega_0^2 u = 0$$

$$\text{Le facteur de qualité est donc } Q = \omega_0 RC = \frac{1}{RC} RC = R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

solution de l'équation différentielle:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} = 10^6 \cdot 10^{-7} = 10^8 \quad \omega_0 = 10^4 \text{ rad/s}$$

$$Q = R \sqrt{\frac{C}{L}} = 10 \quad \text{d'où} \quad \frac{\omega_0}{Q} = 10^3$$

→ système pseudo-périodique car $Q > \frac{1}{2}$

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = 10^6 - 4 \cdot 10^8 = -4 \cdot 10^8$$

$$\text{donc } u(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \quad \text{avec } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{4Q^2}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

$$\omega \approx \omega_0 \quad \text{car } \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = 0,999$$

$$u(t) = e^{-500t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$$

$$\text{Conditions initiales: } q(0) = 1 \mu C \quad \text{donc } u(0) = \frac{q}{C} = 10 V \quad \text{donc } i_2(0) = \frac{u}{R} = 1 \text{ mA}$$

$$\text{At } i(0) = -2 \text{ mA} \Rightarrow i_1 + i_2 + i = 0 \quad i_1 = -i - i_2 = 2 - 1 = 1 \text{ mA}$$

$$\text{Or } i_1(0) = C \dot{u}(0) = 10^{-3} A$$

$$\dot{u}(t) = e^{-500t} \left((-500)(A \cos \omega t + B \sin \omega t) + (-A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t) \right)$$

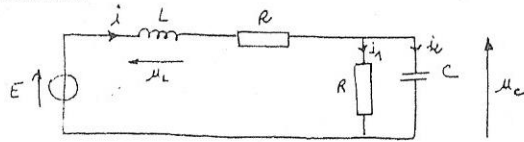
$$\dot{u}(0) = -500A + B\omega_0$$

$$\text{d'où:} \quad \begin{cases} u(0) = 10 V = A \\ C\dot{u}(0) = 10^{-3} = (-500A + B\omega_0) C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 10 V \\ B = \left(\frac{10^{-3}}{C} + 500 \cdot 10 \right) \frac{1}{\omega_0} = 1,7 V \end{cases}$$

$$u(t) = e^{-500t} (10 \cos 10^4 t + 1,7 \sin 10^4 t)$$

Couche fin exercices

Exercice 9



Le condensateur étant initialement déchargé, tous les courants et tensions sont nuls à $t=0^-$.

À $t=0^+$ quo qu'on ferme de l'interrupteur, l'intensité i traversant la bobine est continue et est donc nulle.

La tension au borne du condensateur étant continue elle vaut à $t=0^+$: $u_C(0^+) = 0$.

Par conséquent à $t=0^+$ $u_C(0^+) = E$. u_L est discontinue.

On cherche l'équation différentielle sur i :

La loi des mailles donne: $E = u_C + Ri + u_L = u_C + Ri + L \frac{di}{dt}$.

d'où $u_C = E - Ri - L \frac{di}{dt}$.

Or $i_2 = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{d}{dt} (E - Ri - L \frac{di}{dt})$

et $i_2 = i - i_1 = i - \frac{u_C}{R} = i - \frac{1}{R} (E - Ri - L \frac{di}{dt}) = i - \frac{E}{R} + i + \frac{L}{R} \frac{di}{dt}$.

donc

$$C(-R \frac{di}{dt} - L \frac{d^2i}{dt^2}) = i - \frac{E}{R} + \frac{L}{R} \frac{di}{dt}$$

$$LC \frac{d^2i}{dt^2} + (RC + \frac{L}{R}) \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R}$$

$$\frac{d^2i}{dt^2} + (\frac{R}{L} + \frac{1}{RC}) \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{1}{R} \frac{E}{LC}$$

Or $RC = \frac{L}{R} = \tau$ donc

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{E}{RLC}$$

et $LC = R^2 C^2 = \tau^2$ d'où

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau^2} i = \frac{E}{R\tau^2}$$

C'est eq. diff. peut s'écrire encore: $\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \frac{E}{R\tau^2}$

avec $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{2}{\tau}$ soit $Q = \frac{\omega_0}{2} \tau = \frac{\sqrt{1/LC}}{2} \tau = \frac{\sqrt{1/LC}}{2} \frac{L}{R} = \frac{1}{2R} > \frac{1}{2}$

⇒ régime transitoire pseudo-périodique.

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau^2} i = \frac{E}{R\tau^2}$$

La solution de cette équation différentielle est: $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$

solution générale de l'éq. sans 2^e membre

solution particulière constante: $i_2(t) = \frac{E}{2R}$

cherchons $i_1(t)$

équation caractéristique: $\lambda^2 + \frac{2}{\tau} \lambda + \frac{1}{\tau^2} = 0$

$$\Delta = \frac{4}{\tau^2} - \frac{4}{\tau^2} = -\frac{4}{\tau^2}$$

$$\text{d'où } \lambda_1 = -\frac{1}{\tau} + j \frac{1}{\tau}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{\tau} - j \frac{1}{\tau}$$

$$i_1(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} (A \cos \frac{t}{\tau} + B \sin \frac{t}{\tau}) \quad \text{avec } \omega = \frac{1}{\tau}. \quad \text{donc } i(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} (A \cos \frac{t}{\tau} + B \sin \frac{t}{\tau}) + \frac{E}{2R}$$

de plus à $t=0^+$ $i=0$ donc $0 = 1(A+0) + \frac{E}{2R}$ $A = -\frac{E}{2R}$

donc pui $u_C(0^+) = 0 = E - Ri - L \frac{di}{dt}$

sachant pui $i = e^{-\frac{t}{\tau}} (A \cos \frac{t}{\tau} + B \sin \frac{t}{\tau}) + \frac{E}{2R}$

$$\frac{di}{dt} = e^{-\frac{t}{\tau}} \left[-\frac{1}{\tau} (A \cos \frac{t}{\tau} + B \sin \frac{t}{\tau}) + \left(-\frac{A}{\tau} \sin \frac{t}{\tau} + \frac{B}{\tau} \cos \frac{t}{\tau} \right) \right]$$

$$\text{à } 0^+ \quad \frac{di}{dt}(0^+) = \left(-\frac{1}{\tau} A \right) + \frac{B}{\tau}$$

or $A = -\frac{E}{2R}$ donc $u_C(0^+) = 0 = E - 0 - L \left(-\frac{A}{\tau} + \frac{B}{\tau} \right)$

$$E = L \left(\frac{B}{\tau} + \frac{E}{2R\tau} \right)$$

$$B = \frac{E}{L} \tau - \frac{E}{2R} = \frac{E}{R} - \frac{E}{2R} = \frac{E}{2R}$$

Finalement: $i(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \left[-\frac{E}{2R} \cos \frac{t}{\tau} + \frac{E}{2R} \sin \frac{t}{\tau} \right] + \frac{E}{2R}$

$$i(t) = \frac{E}{2R} \left[e^{-\frac{t}{\tau}} \left(-\cos \frac{t}{\tau} + \sin \frac{t}{\tau} \right) + 1 \right]$$

lim $i(t) = \frac{E}{2R}$ ⇒ cohérent car en régime permanent continu:

